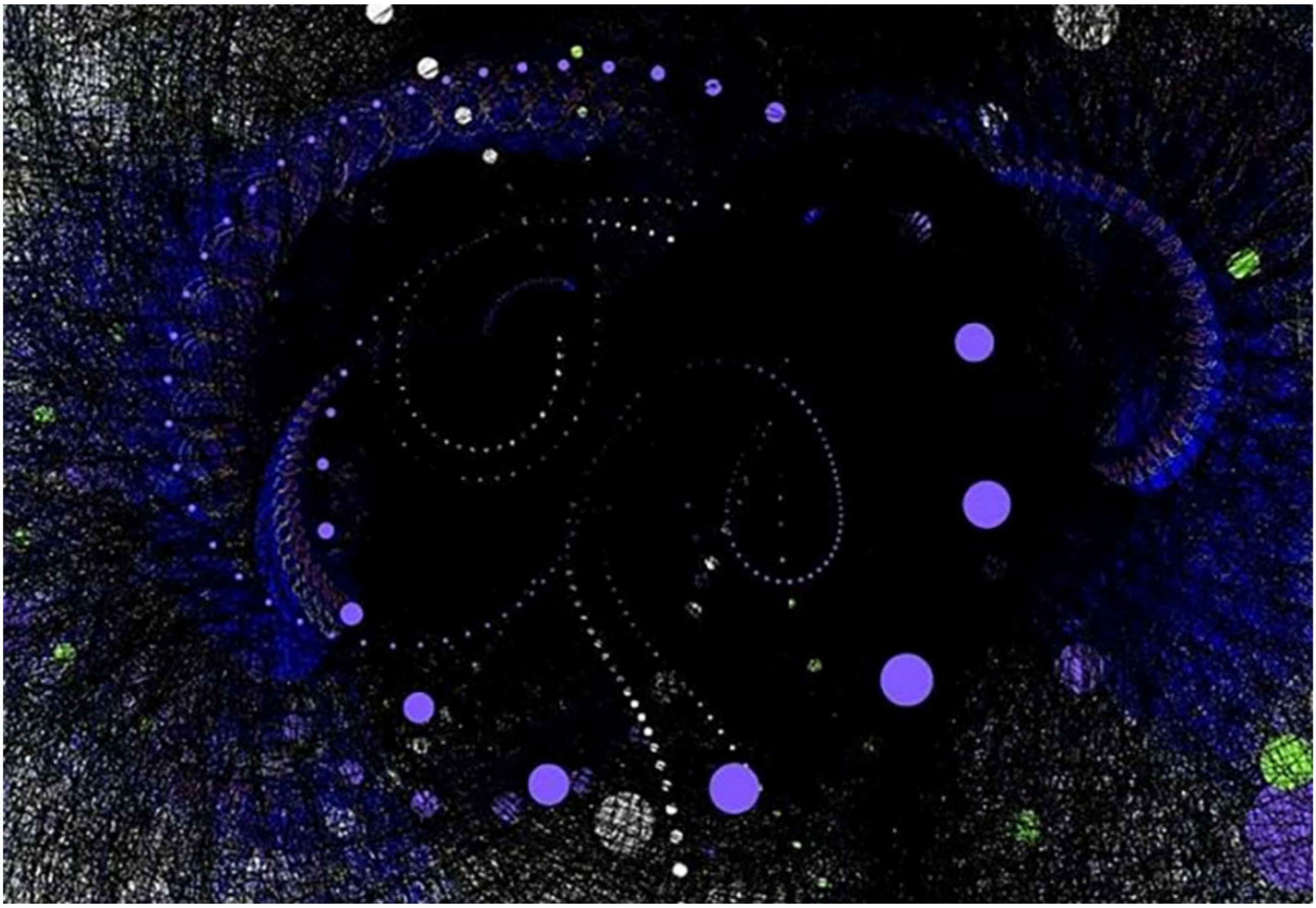
Моделирование эстетической геометрии: видео-арт и планетная система в 14 иллюстрациях



От редакции

В статье «Эстетика, симметрия и геометрия окружности», №8 2019 (/2019-08/546-geometry), даны общее представление об эстетической геометрии. Этот раздел геометрии базируется на ряде новых идей автора, связанных с симметрией относительно круга.
В данной статье рассказывается о разработанной автором системе визуализации (видео-арт) объектов эстетической геометрии. Кроме того, речь пойдет о моделировании движения планет Солнечной системы и их спутников.

Введение

Окружность с древности считалась совершенной фигурой, но применяем её мы не так, как Аристотель или Птолемей, чья идея эпициклов и деферентов кардинально важна для видео-арта.

В эстетической геометрии окружность – это не только самая симметричная фигура, но и фигура, относительно которой есть симметрия. И именно симметрия относительно окружности (называемая также инверсией) создаёт видео-арт эстетической геометрии, несколько стоп-кадров из него мы приведём ниже, а рассмотренное моделирование движения небесных тел будет существенно точнее моделирования Птолемея: оно автоматически построит эллиптическое (в общем случае – кривые второго порядка, конические сечения) движение.

Наш рассказ будет основан на иллюстрациях: картинках и чертежах.

Общие принципы видео-арта: двигатель, движимое, рекуррентные формулы и Δt

Мы видим стоп-кадр из бесконечной картины видео-арта под названием «Космос». Сама картина состоит из трёх элементов: форма, цвет и ритм, ритм в котором одно изображение сменяет другое. При этом изображение на экране никогда не повторяется, но бесконечно обновляется, сохраняя стиль и общее настроение.

Смена изображения и его ритм основаны на симметрии относительно окружности и композиции таких симметрий. Обычно изображение создано «двигателем» и «движимым». Двигатель, состоящий из окружностей, части которого сами могут двигаться, создаёт аналог силового поля, которое по заданным автором законам действует на движимое. Движимым могут быть окружности или другие фигуры. При этом сам двигатель остаётся невидимым, на экране мы наблюдаем лишь движимые им объекты.

Далее мы поясним принципы работы и создания двигателя, мы считаем, что эти законы могут объяснить и барочные формы, и дать строгое геометрическое основания тем поискам в искусстве, которые художественно выражали художники первой половины 20-го века: Кандинский, Филонов, Сальвадор Дали.

Рис. 2 демонстрирует стоп-кадр другой работы видео-арта «Летающая зебра». Обратим внимание: на верхнем рисунке движимыми были окружности и круги, здесь же двигаются только круги.

Как же летает эта зебра? Её двигатель, обозначим его M, состоит из окружностей, каждая из окружностей двигателя, обозначим их M_1, M_2, M_3,..., M_K, определяет симметрию относительно самой себя, эти симметрии мы обозначаем так же, как и окружности, определяющие их. Обозначим видимые, движимые круги как $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_T$, а их совокупность обозначим S.

В каждый момент времени t все окружности двигателя и движимые объекты занимают какое-то конкретное положение на плоскости, формула двигателя, точнее *формулы двигателя* (двигатель задаётся не одной формулой, а многими) определяют, какое положение займут окружности двигателя в следующий момент времени: $t+\Delta t$.

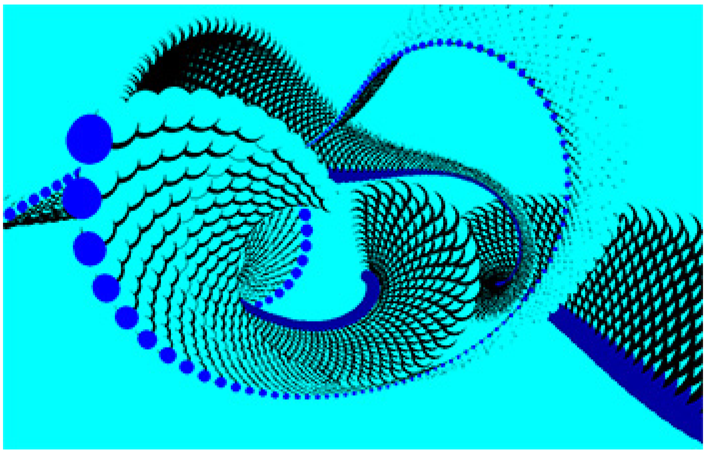


РИС. 2. «ЛЕТАЮЩАЯ ЗЕБРА»

*Эти формулы, в математике подобные формулы называют **«рекуррентными» или возвратными**, определяют шаговое движение объектов и являются математической сутью каждой бесконечной картины видео-арта.*

Это особенные формулы, непривычные для тех, кто видит в математике в основном вычисления. В них нет чисел, с ними можно оперировать, не зная сложения и умножения, достаточно уметь осуществлять симметрию относительно окружности, они состоят из композиций симметрий относительно окружностей двигателя M.

У каждой окружности двигателя M, у каждого объекта из движимого S – собственная формула, в которой указаны окружности, относительно которых данная окружность M_i или данный объект движимого S_j инвертируется (симметрично отражается), и порядок, в котором эти симметрии осуществляются.

Приведём пример таких формул. Пусть двигатель состоит из трёх окружностей M_1, M_2, M_3, а движимое – всего одна окружность S.

Первая формула, выражающая движение M_1, $F_1=M_3*M_2$, знак * означает композицию, такую запись следует читать справа налево: вначале окружность отражается (инвертируется) относительно M_2, затем относительно M_3. Вторая формула, для окружности M_2, $F_2=M_1*M_3$, наконец, для окружности M_3, $F_3=M_2*M_1$.

В начале движения (t=0) окружности занимали заданные места, в следующий момент времени Δt M_1 займёт положение $F_1(M_1)=M_3(M_2(M_1))$, M_2 займёт положение $F_2(M_2)=M_1(M_3(M_2))$, M_3 займёт положение $F_3(M_3)=M_1(M_2(M_3))$. Чтобы узнать положение окружностей двигателя в следующий момент времени $2\Delta t$, надо применить те же самые формулы, учитывая, что положение окружностей изменилось. И так далее.

На картине мы видим не двигатель, а движимое, движимое отличается от двигателя тем, что может состоять не только из окружностей, и объекты движимого не обязательно задают симметрию, поэтому элементы движимого не входят в формулы движения. Мы задали движение невидимого двигателя, осталось указать, как он двигает движимое, в нашем примере это одна окружность S.

Мы можем написать любую формулу, например $F(S)=M_1(M_2(M_3(S)))$. Это будет первым примером «бесконечной картины», и как часто бывает с первым примером – вряд ли он даст изящную картину, но описанный метод построения образа через рекуррентные зависимости и создаёт полёт зебры.

Отметим – *на картине мы видим не только последнее положение движимых фигур, но и предыдущие их положения, каждая фигура оставляет след своего движения.*

Программы Додека, Δt и устойчивость движения

Рис. 3 «Вышиванье Додеки» представляет новую бесконечную картину. Движимое на ней – только окружности, причём их так много, что возникающие образы визуально не кажутся составленными из окружностей. Кроме самой картины, внизу рисунка есть полоска командной строки программы DodecaLook для Windows.

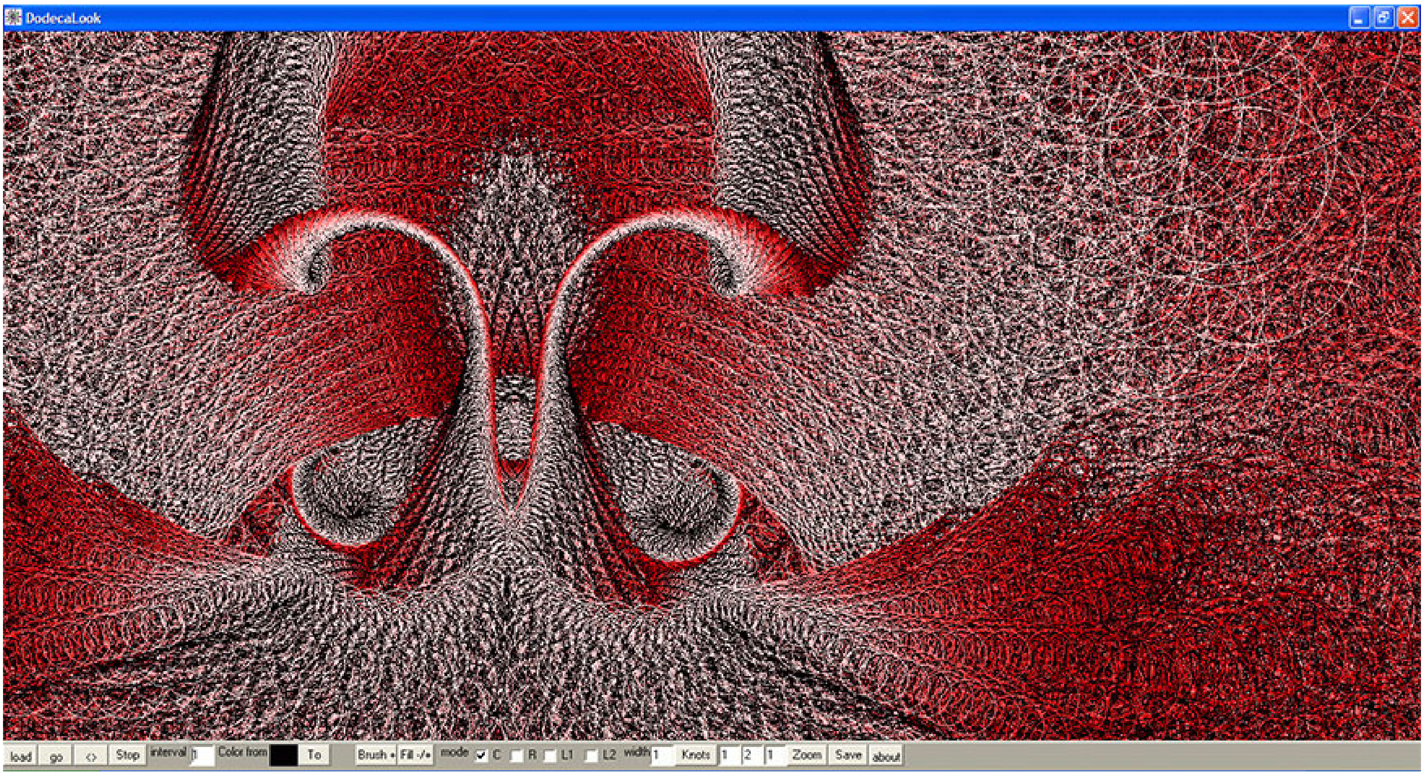


РИС. 3. «ВЫШИВАНЬЕ ДОДЕКИ»

Додека, или Dodeca – это название нескольких программ для создания и демонстрации видео-арта эстетической геометрии и для обучения эстетической геометрии. DodecaLook позволяет просматривать бесконечные картины, перекрашивать их, изменять форму движимого, и, что для нас особенно важно, – рассматривать их в пошаговом режиме, при котором переход от кадра к кадру осуществляется не непрерывно, а по нажатию клавиши.

Это позволяет рассматривать отдельные кадры внимательней, замечая интереснейшие их фрагменты, и – видеть изменения, происходящие при однократном применении рекуррентных формул, при нажатии клавиши происходит изменение, которое ранее мы называли «изменением за время Δt».

В компьютерной модели движения Δt – *это время, нужное машине для прорисовки новых объектов*, обычно оно очень мало, а в программе для андроида пользователь может самостоятельно его регулировать.

Нажав на клавишу N раз мы видим изменение за время $N \cdot \Delta t$. Для андроида эти возможности реализованы в программе «Додека: медитация».

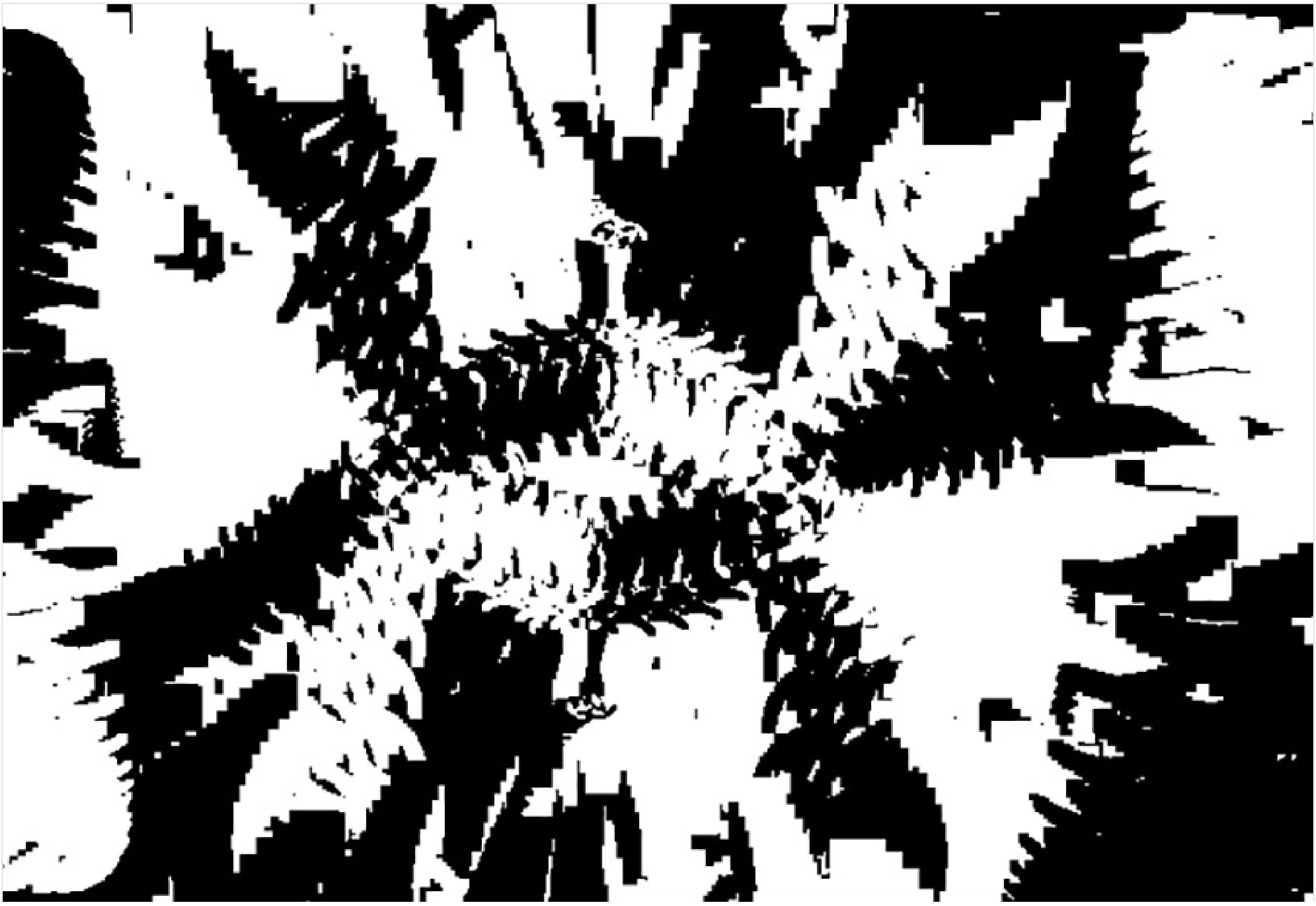


РИС. 4. ГОРОД И ЛЮДИ

На рис. 4 «город и люди» мы видим кадр бесконечной картины, где двигаются квадраты. Как и на рис. 3, рисунок не воспринимается составленным из двигающихся квадратов, поскольку они сливаются друг с другом, составляя прихотливые фигуры, появляющиеся и распадающиеся.

Как мы увидим, законы движения картины описать нетрудно, но точно описать, что появляется на экране через заданное время – порой весьма сложно, *динамическое описание гораздо проще, чем описание каждого отдельного кадра бесконечной картины*.

В некоторых рисунках неограниченное время двигаются сотни и тысячи объектов, причём изображение никогда не повторяется. Проверить работу программы за бесконечной время не получится, но много часов наблюдать картины возможно, и, несмотря на то, что все вычисления производятся машиной с малой, но всё же существующей погрешностью, и эти погрешности, связанные, в том числе, и с возникающим «делением на ноль», накапливаясь за миллионы, а может быть и миллиарды вычислительных действий, могут привести к существенным и не гармоничным искажениям образа.

Но, как это ни удивительно, – *искажений не происходит, что означает устойчивость используемых алгоритмов*.

На следующем рисунке мы даём пример движимого, состоящего из линий и квадратов (изменять двигающиеся фигуры в программах Додека можно одним щелчком мыши), гармония образов есть и в этом случае.

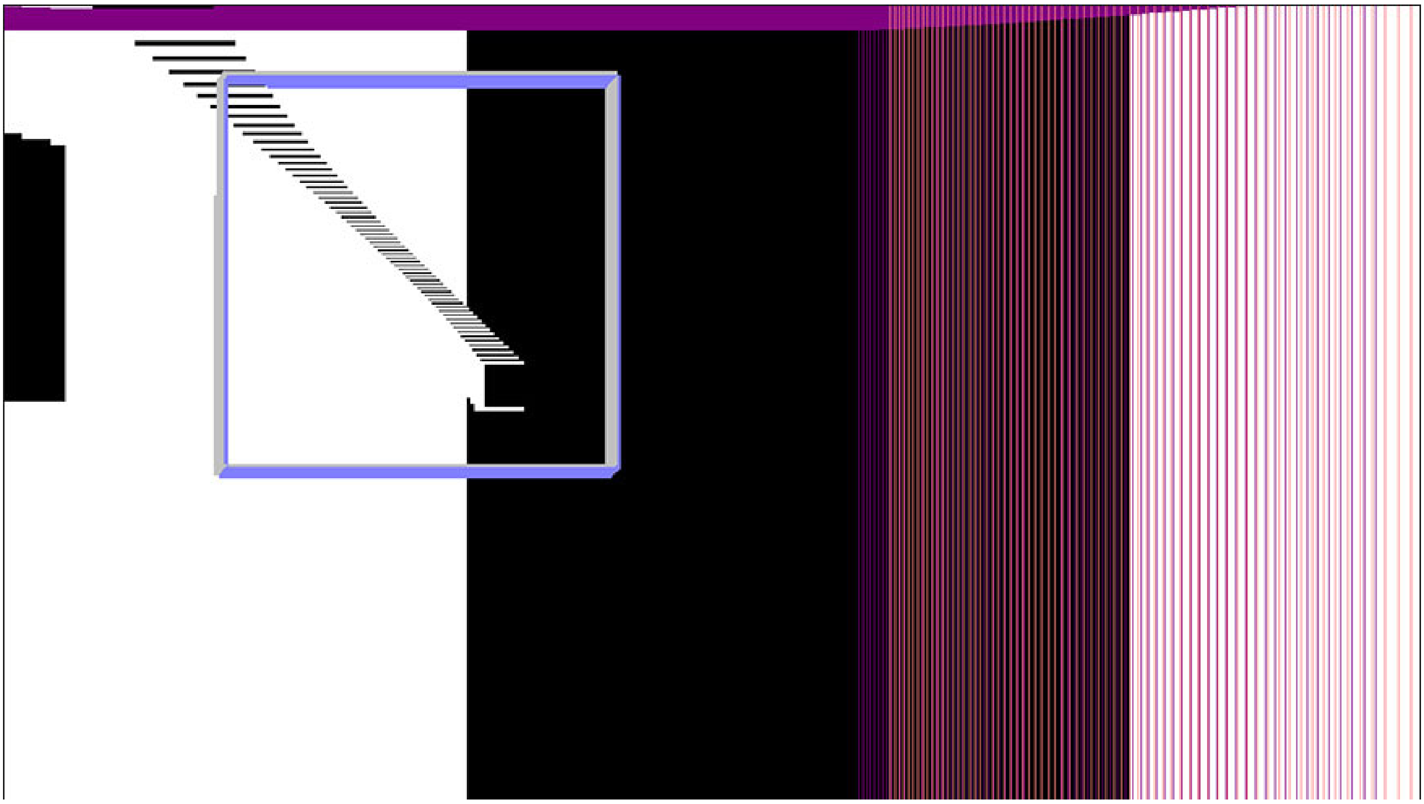


РИС. 5. КОМПОЗИЦИЯ С ЛИНИЯМИ И КВАДРАТАМИ

Атомы рекуррентных формул: композиция симметрий относительно двух окружностей

Сравним рекуррентные формулы, создающие видео-арт, с молекулой, определяющей свойства бесконечной картины, как определяют молекулы свойства химических веществ.

Молекулы состоят из атомов, что же является атомами, из которых состоит молекула-формула? Простейшим движением, или *атомом,* в мире композиций инверсий будет движение, определённое композицией инверсий относительно двух окружностей.

Пользуясь введенными ранее понятиями двигателя и движимого, опишем этот атом так: двигатель состоит из двух неподвижных окружностей T и S, движимое это окружность *a*, за ∆t она инвертируется сначала относительно T, затем относительно S, т.е. её формула F(*a*)=S(T(*a*)).

В таблице Менделеева больше сотни различных атомов, в нашем случае атомы также бывают различных типов. Во-первых, тип получающегося движения зависит от того, имеют ли окружности S и T общие точки, если эти окружности пересекаются, то также возможны разные виды движений. Также вид движения зависит от того, как расположена окружность *a* относительно S и T.

Сейчас мы рассматриваем *простейший случай, когда двигается точка, а не окружность, впрочем, мы можем рассматривать точку как столь малую окружность, что размером её можно пренебречь.* Поскольку окружность, как и всякая фигура, состоит из точек, поняв движение точек, мы поймём много и о движении окружности.

Мы видим, что точка двигается по окружности. Изменяя положение точки *a* мы видим, как меняются траектории её движения. При этом на экране мы видим последовательное возникновение новых точек, изображение стартует с точки a, затем к нему добавляются, каждый раз за интервал ∆t, h(a), h(h(a)), h(h(h(a))) и так далее. Если ∆t мало, и за ∆t точка сдвигается очень мало, то движение покажется непрерывным, такие движения мы обычно и используем для видео-арта (хотя и есть интересные исключения разрывных движений).

Траектории движения точки – окружности, перпендикулярные окружностям двигателя S и T и проходящие через стартовую точку. Мы не будем это доказывать, напомним лишь ***определение перпендикулярных окружностей****: две окружности называются перпендикулярными друг другу, если при симметрии относительно одной – другая окружность перейдёт в себя.*

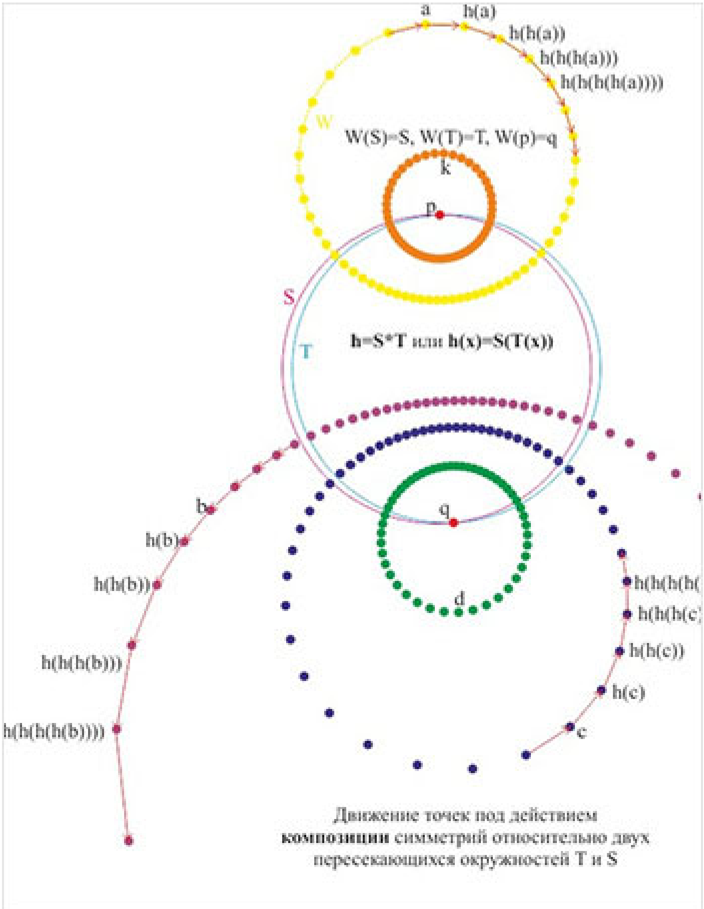


РИС 6. ПЕРЕСЕКАЮЩИЕСЯ ОКРУЖНОСТИ *T* И *S* И ВОЗДЕЙСТВИЕ КОМПОЗИЦИИ ИНВЕРСИЙ *S·T* НА ТОЧКУ *a*: РАБОТА ПРОСТЕЙШЕГО, АТОМАРНОГО, НЕПОДВИЖНОГО, ДВИГАТЕЛЯ

Точно также определяются перпендикулярные прямые. Отметим важные свойства точек пересечения S и T (точки p и q на рисунке): они сами неподвижны при действии h, они симметричны друг другу относительно любой траектории движения; окружности-траектории малы вблизи этих точек, увеличиваясь по мере удаления от них, превращаясь в прямую, если *a* лежит на прямой, соединяющей центры S и T, легко видеть, что эта прямая перпендикулярна прямой pq.

Прямые в эстетической геометрии – частные случаи окружности, но визуализация прямых, конечно, отличается от визуализации окружности, что очень важно для эстетики. Очень важно также, что, хотя точки двигаются по окружностям, это движение неравномерно: вблизи точек p и q оно медленнее, вдали – быстрее.

В геометрии окружности окружности-траектории называются пучком окружностей с центрами в p и q.

Для того, чтобы движение точки воспринималось нами как непрерывное, необходимо, чтобы на каждом шаге Δt положение точки изменялось мало: a должно быть близко к *h(a)*. Как этого добиться? Если бы окружность S совпадала с T, то S*T не изменяла бы положение точек, т.к. эта композиция была бы двукратной симметрией относительно одной и той же окружности.

Если же S и T хотя и не совпадают, но отличаются друг от друга очень мало, то S*T будет изменять положение точек незначительно, что и требовалось. При таких условиях *рекуррентные формулы, описывающие движение, можно рассматривать как дифференциальные уравнения, и вместо Δt можно писать dt.*

Мы описали движение точки под действием композиции симметрий относительно двух пересекающихся окружностей.

Пусть теперь окружности двигателя не имеют общих точек.

В этом случае точки двигаются по дугам, втягиваясь в одну и ту же предельную точку плоскости. Через некоторое, обычно небольшое, время произвольная точка *a* окажется вблизи этой предельной точки и на экране просто ничего не будет происходить, поскольку положение точки будет изменяться очень мало. *По этой причине для видео-арта мы не используем такие атомы* (хотя, возможно, их интересно использовать, получаемые картины будут иметь начало и конец).

Заметим, что дуги, по которым двигаются точки, являются частями окружностей, перпендикулярных двум данным окружностям S и T. Эти окружности все пересекаются в двух точках: одна их них предельная, куда стягиваются все точки под действием h=S*T, а вторая точка – это точка, откуда все точки под действием h вытягиваются, она будет предельной точкой преобразования, обратного h (здесь осуществляется композиция симметрий относительно S и T, но взятых в другом порядке h^{-1}=T*S).

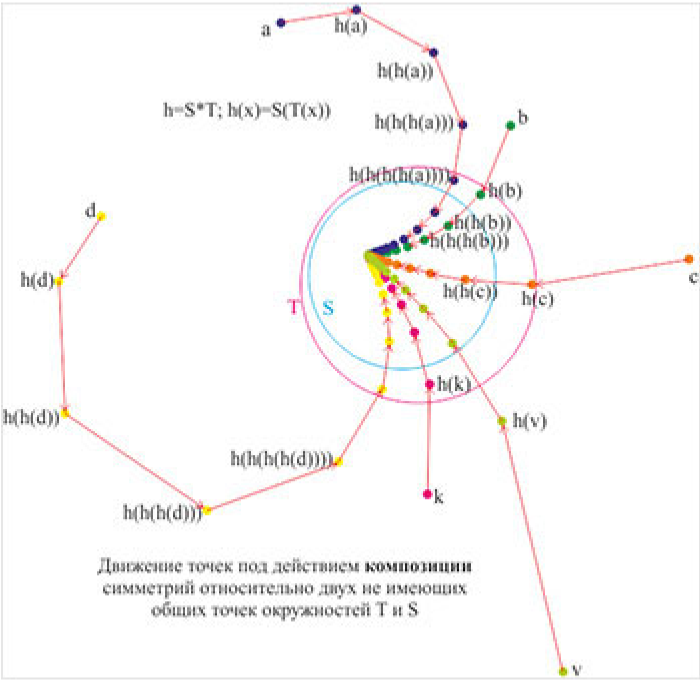


РИС. 7. НЕ ИМЕЮЩИЕ ОБЩИХ ТОЧЕК ОКРУЖНОСТИ *S* И *T* ОПРЕДЕЛЯЮТ ДВИЖЕНИЕ ТОЧЕК *a, b, c*

Другой тип атома возникает, когда S и T касаются друг друга, он похож на рассмотренный только что, но в этом случае точки втягивания и вытягивания совпадают друг с другом и с точкой касания исходных окружностей. Опять-таки, этот случай не даёт бесконечного движения, оно возникает только при пересекающихся окружностях двигателя, и потому мы здесь его не описываем, хотя он и очень интересен.

Теперь рассмотрим движение *не точки, а окружности* под действием композиции инверсий h=T*S.

Мы видим, в верхней части рисунка, что двигающаяся окружность перемещается между двумя окружностями M и L, касаясь их обеих, при этом M и L перпендикулярны данным S и T, размер двигающейся окружности меняется: уменьшается вблизи точек пересечения S и T, и увеличивается вдалеке. Если двигающаяся окружность пересекает прямую, проходящую через центры окружностей двигателя, то её радиус возрастает неограниченно, в какой-то момент эта окружность превратится в прямую (с точки зрения геометрии окружности в этом нет никакого превращения, прямая – частный случай окружности, но визуально и эстетически это очень важная перемена). На рисунке такой случай показан зелёными кругами, в прямую (или полуплоскость) зеленый круг превратится за пределами рисунка.

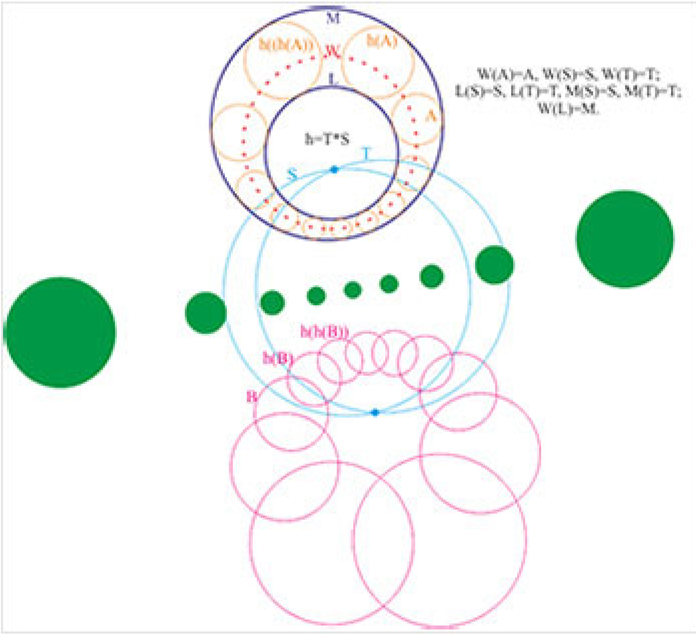


РИС. 8. АТОМ СОСТОИТ ИЗ ДВУХ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ И ОКРУЖНОСТИ, ИНВЕРТИРУЮЩЕЙСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО НИХ

На экране образ будет появляться так: a, h(a), h(h(a)),…, h^k(a)… каждый шаг (т.е. добавление нового объекта h^k(a), происходит за малое время Δt. Может ли случиться так, что окружность через какое-то время вернётся на то же самое место, с которого стартовала? Это означает, что h^k(a)=a. Такое возможно, если угол между окружностями двигателя T и S соизмерим с π т.е имеет вид π *a/b*, где *a* и *b* – целые числа.

Ниже мы приводим примеры другого расположения двигающейся окружности *a* относительно S и T.

На предыдущих рисунках двигающаяся окружность *не разделяла* точки пересечения окружностей двигателя. На рис. 9 мы показываем, что происходит, когда она их *разделяет*. Окружности M и L – это чёрный кружок внутри и огибающая окружность снаружи. Мы немного раскрасили рисунок и предоставляем читателю возможность самостоятельно увидеть двигающуюся окружность *a*. На рис. 10 окружность *a* проходит через точку пересечения S и T. Легко понять, что в этом случае все окружности $h^k(a)$ также проходят через эту точку, на рисунке мы показываем, какой интересный мир возникает вблизи неё (сама окружность *a* столь велика, что не поместится на рисунке).

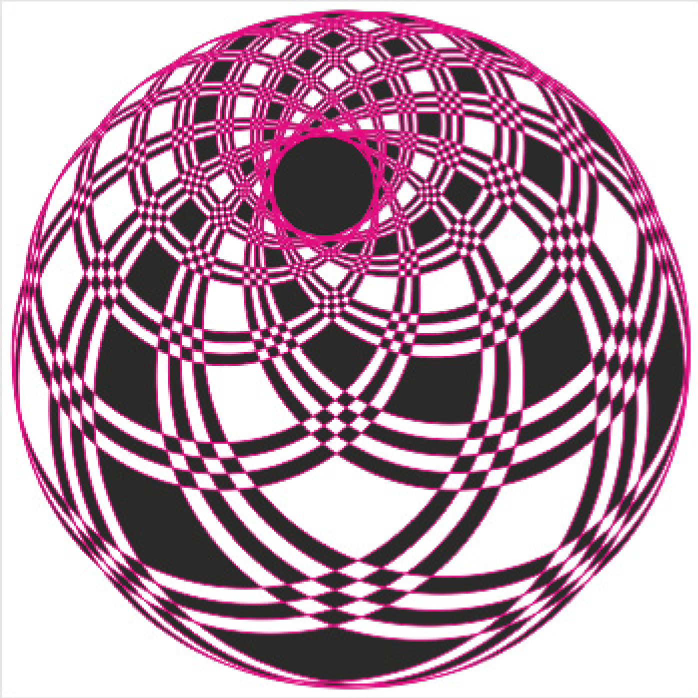


РИС. 9

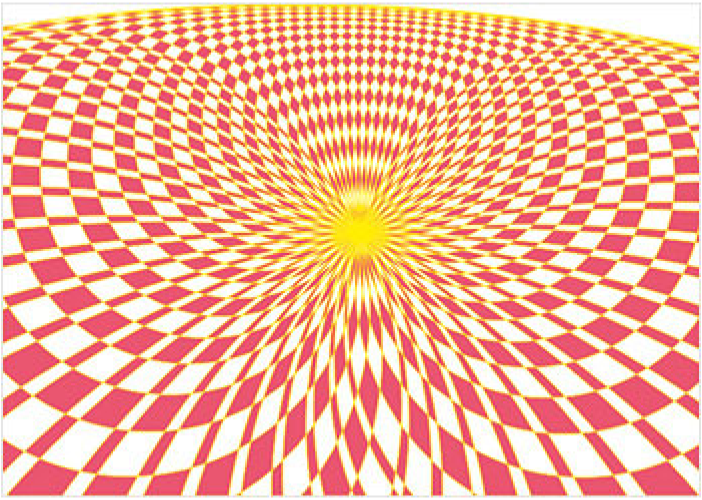


РИС. 10

Мы видим, что даже простейший двигатель из двух неподвижных окружностей создаёт нетривиальные образы, и между строением эстетического образа и геометрическим расположением исходных окружностей существуют нетривиальные связи. Более того, разные фрагменты (как мы видим на рис. 10) имеют неповторимые свойства. Кроме того, для визуального восприятия образов важно, есть ли на них прямые линии, какие окружности велики, а какие малы (с точки зрения геометрии окружности это не имеет значения), поэтому детальная классификация различных случаев даже такого простого двигателя заняла бы больше места, чем возможно в этих заметках. Теперь мы перейдём к составлению молекул из рассмотренного атома.

Составление «молекулы» движения из «атомов» – иерархический метод

Припишем разобранному выше атому, с двигателем из двух пересекающихся окружностей, и движимым им окружностям иерархию 1, имея в виду, что в ней двигатель управляет движимым и больше никто ничем не управляет. Теперь добавим в двигатель ещё две пересекающиеся окружности: пусть они двигают атом первого двигателя. Теперь наш двигатель состоит из четырёх элементов: первые два двигают все остальное, вторые два – только движимое. Такому двигателю мы припишем иерархию 2. Эта ситуация изображена на рис. 11. Мы видим здесь разноцветные траектории, характерные для одноиерархических двигателей, и одну, ярко-зеленую, траекторию, обвивающую темно-зелёную траекторию. Ярко-зелёная траектория характерна для двигателя второй иерархии, а темно-зелёным показано движение пары окружностей, относительно которых двигаются ярко-зелёные. Это движение напоминает движение планеты и ее спутника: обвивается вокруг траектории планеты.

Иерархический двигатель естественно возникает из Птолемеевской системы мира, изложенной в «Альмагесте» или «Математическом собрании», там эта идея реализована в виде эпицикла и деферента. Эпициклом называется окружность, по которой двигается планета, а деферентом называется окружность по которой двигается центр эпицикла. В первом приближении это неплохо описывает движение планет. В нашей терминологии система эпицикла и деферента аналогична двигателю иерархии 2; можно предположить, что центр деферента также не неподвижен, а движется по окружности – это будет аналогично двигателю третьей иерархии.

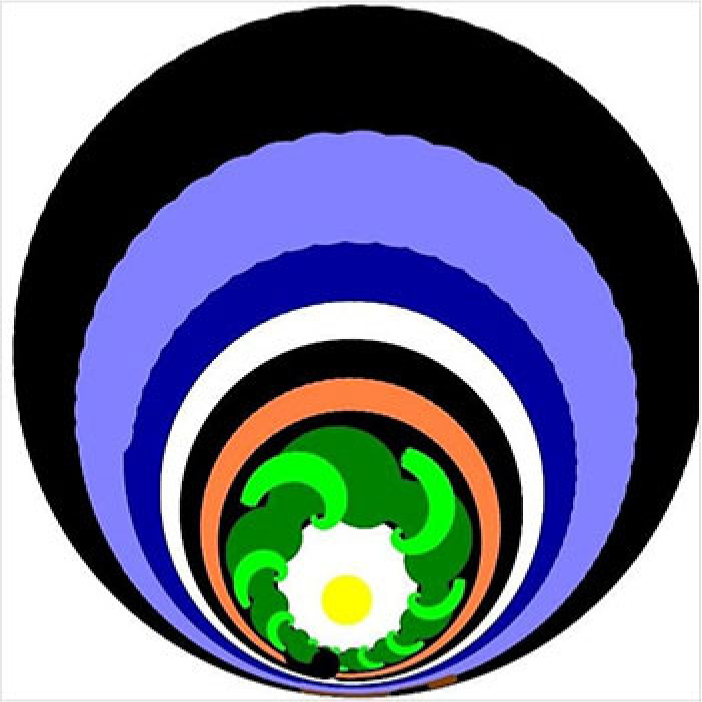


РИС. 11. «ПЛАНЕТЫ И СПУТНИК»

Двигатель третьей иерархии составляется аналогично предыдущему: мы добавляем ещё одну пару пересекающихся окружностей, относительно которых двигается двигатель иерархии 2, таким способом можно составить двигатель сколь угодно большой иерархии. В видео-арте мы обычно используем именно двигатель третьей иерархии – из трёх пар окружностей: одна пара двигает все, следующая – одну оставшуюся пару, и все окружности двигателя двигают движимое, движение которого мы и наблюдаем на экране.

Движение по эллипсу и кривым второго порядка

Сейчас мы покажем, что видео-арт эстетической геометрии моделирует движение планет точнее системы Птолемея, учитывая эллиптичность (в общем случае – кривые второго порядка) орбит и неравномерность движения.

На рис. 8 мы рассматривали главные свойства движения окружности под действием композиции инверсий относительно двух данных пересекающихся окружностей. Было замечено, что она двигается между двумя другими, касаясь их. Теперь мы ответим на вопрос, по какой траектории двигается центр этой окружности. На рис. 12 двигающаяся окружность X с радиусом R_X касается большей окружности O_1 с радиусом R_1 и меньшей, лежащей в O_1 окружности O_2 с радиусом R_2 (мы обозначаем окружности и их центры одними и теми же символами). Сумма расстояний от центров окружностей O_1 и O_2 до центра двигающейся окружности X постоянна и равна R_1+R_2.

Доказательство. Из чертежа видно, что

$$O_2X=R_2+R_X \text{ и } O_1X=R_1-R_X. \qquad (!)$$

Сложив эти два равенства, имеем $O_2X+O_1X=R_1+R_2$, что и требовалось доказать. Отсюда следует, что центр окружности X двигается по эллипсу с фокусами в O_1 и O_2 (штрихованная линия на рис. 12). В нашем случае эксцентриситет этого эллипса невелик, он напоминает окружность, как близки к окружности и траектории планет солнечной системы. Чтобы прямо связать эту модель с моделью движения планет, нужно приписать планете некую воображаемую окружность (сферу), центр которой совпадает с планетой. В отличие от привычных моделей, вокруг этой сферы ничего не вращается, но её центр под действием композиции инверсий, рассмотренных на рисунках 8 и 12, будет двигаться по эллипсу. Отметим, что это не только хорошо моделирует движение небесных тел, но и связано с барочным искусством, в котором также эллиптические формы имеют большое значение. Как и происходит в реальности, в нашей модели скорость движения планеты больше, когда планета ближе к O_1 (в перигелии) и меньше, когда планета дальше от O_1 (в афелии).

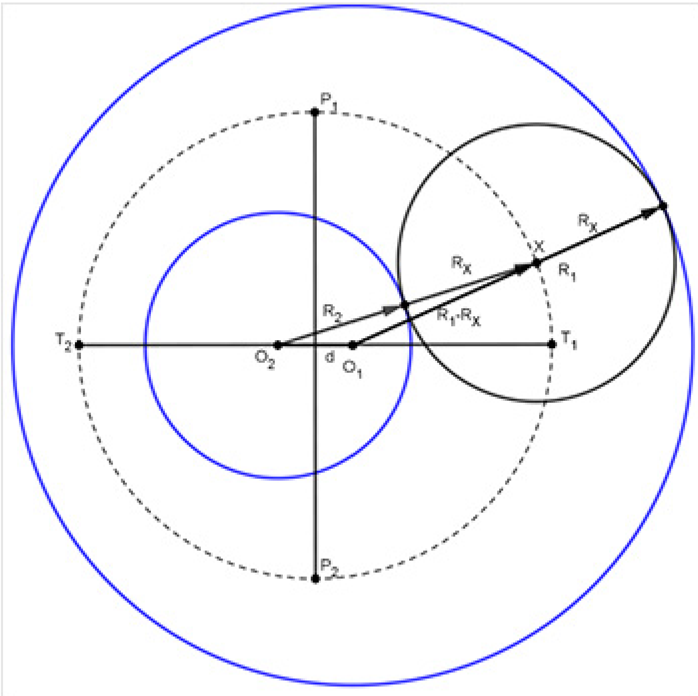


РИС. 12. ДВИЖЕНИЕ ЦЕНТРА ОКРУЖНОСТИ АТОМА

Мы получили движение по эллипсу. Движение по параболе и гиперболе также может быть получено из композиции инверсий относительно двух пересекающихся окружностей. Если окружности, которых касается окружность X, не лежат одна в другой (случай зелёного круга на рис. 8), то центр касающейся их обеих окружности движется по гиперболе (это видно из того, что в формуле (!) в этом случае поменяется знак при R_X), и мы получим, что разность расстояний от X до центров окружностей неизменна, что, как известно, определяет гиперболу. Наконец, если одна из данных окружностей совпадает с прямой, то центр окружности, касающейся её и второй данной окружности, будет двигаться по параболе. *Итак, рассматривая простейший атом видео-арта, мы получаем все возможные конические сечения!* Мы получили эту модель, создавая эстетически привлекательные образы и не ставя целью моделировать движение планет. Обнаружив это сходство, мы спрашиваем – *каков может быть физический смысл в таком совпадении свойств инверсии и планетарной модели?* На этот вопрос ответить могут только физик и астроном.

Замкнутые траектории

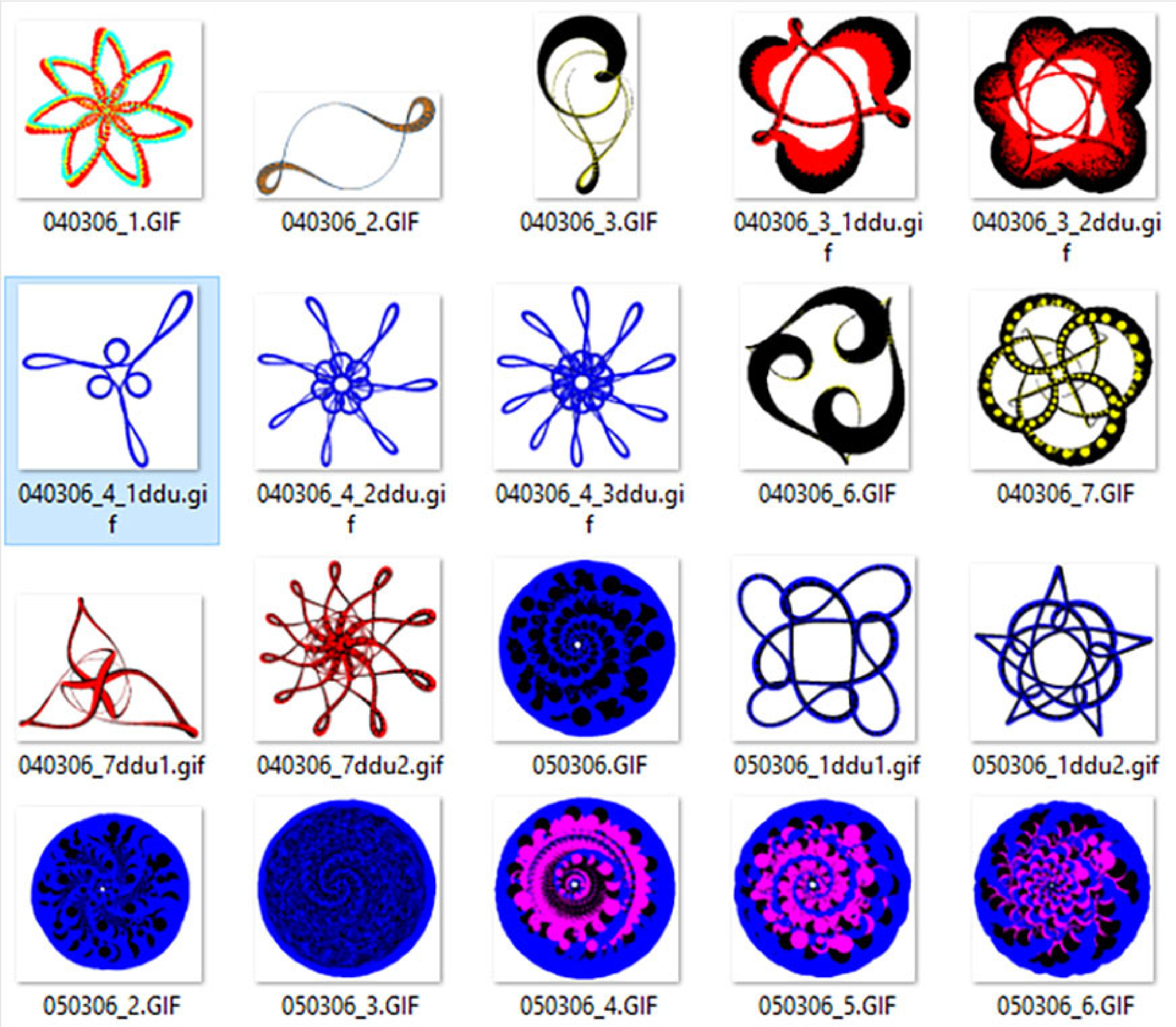


РИС. 13. УЗЛЫ И ОРНАМЕНТЫ

При каких условиях на экране возникнут замкнутые траектории, и картина, сформировавшись, будет оставаться неизменной или меняться очень мало? В общем случае, при произвольной структуре двигателя, мы не знаем ответа на этот вопрос. Но для рассмотренного выше иерархического двигателя мы его дадим. Рассмотрим двигатель иерархии 2, подобный тому, что движет на рис. 11 темно-зелёную планету и вьющийся вокруг планеты ярко-зелёный спутник. Мы будем интересоваться лишь замыканием орбиты спутника. Оказывается, для этого необходимо и достаточно (данное утверждение мы многократно проверяли, но не знаем его строгого доказательства), чтобы были *соизмеримы (т.е. находились в рациональном отношении)* два угла двигателя. Сейчас мы опишем эти углы. Первый угол, α, образуют первые две окружности двигателя (между окружностями, воздействующими на все остальные), второй угол, β, образуют вторые две окружности двигателя, воздействующие только на движимое. *Если $\alpha/\beta = m$, где m – рациональное число, то получающаяся траектория – замкнута*. Легко видеть, что двигатель первой иерархии всегда определяет замкнутую траекторию. Двигатель произвольной иерархии определяет замкнутую траекторию тогда и только тогда, когда все углы между парами окружностей его атомов соизмеримы друг с другом (т.е. частное любых двух углов каждого атома – рационально).

Выше мы привели иллюстрацию получающихся траекторий (для того случая, когда двигающиеся окружности или круги малы и не разделяют точки пересечения окружностей атомов двигателя).

Здесь мы использовали двигатели второй и третьей иерархии. Обратим внимание, что в результате у нас появляются узлы, очень интересно, что, хотя все фигуры созданы средствами плоской геометрии, многие из них воспринимаются как объёмные. Свойства узла, созданного двигателем второй иерархии, определяются рациональным числом m; эти узлы напоминают звёзды, количество вершин и порядок их обхода определяются числителем и знаменателем m. На некоторых рисунках мы видим нечто мало похожее на узел, скорее перед нами орнаменты. Это возникает из-за того, что узел-звезда с большим количеством вершин воспринимается нами как орнамент. *Это даёт нам взгляд на орнамент как на проекцию сложного узла*, именно так порой и создаются многие религиозные или вышитые орнаменты.

Ниже мы видим изображение работы двигателя второй иерархии, создающей «узел» с тройственной симметрией. Но, в отличие от рисунков выше, двигающаяся окружность (несколько чёрных и синих окружностей) велика, и визуально мы имеем совсем другую картину, хотя силовое поле, созданное атомами двигателя, такое же, как на предыдущих рисунках.

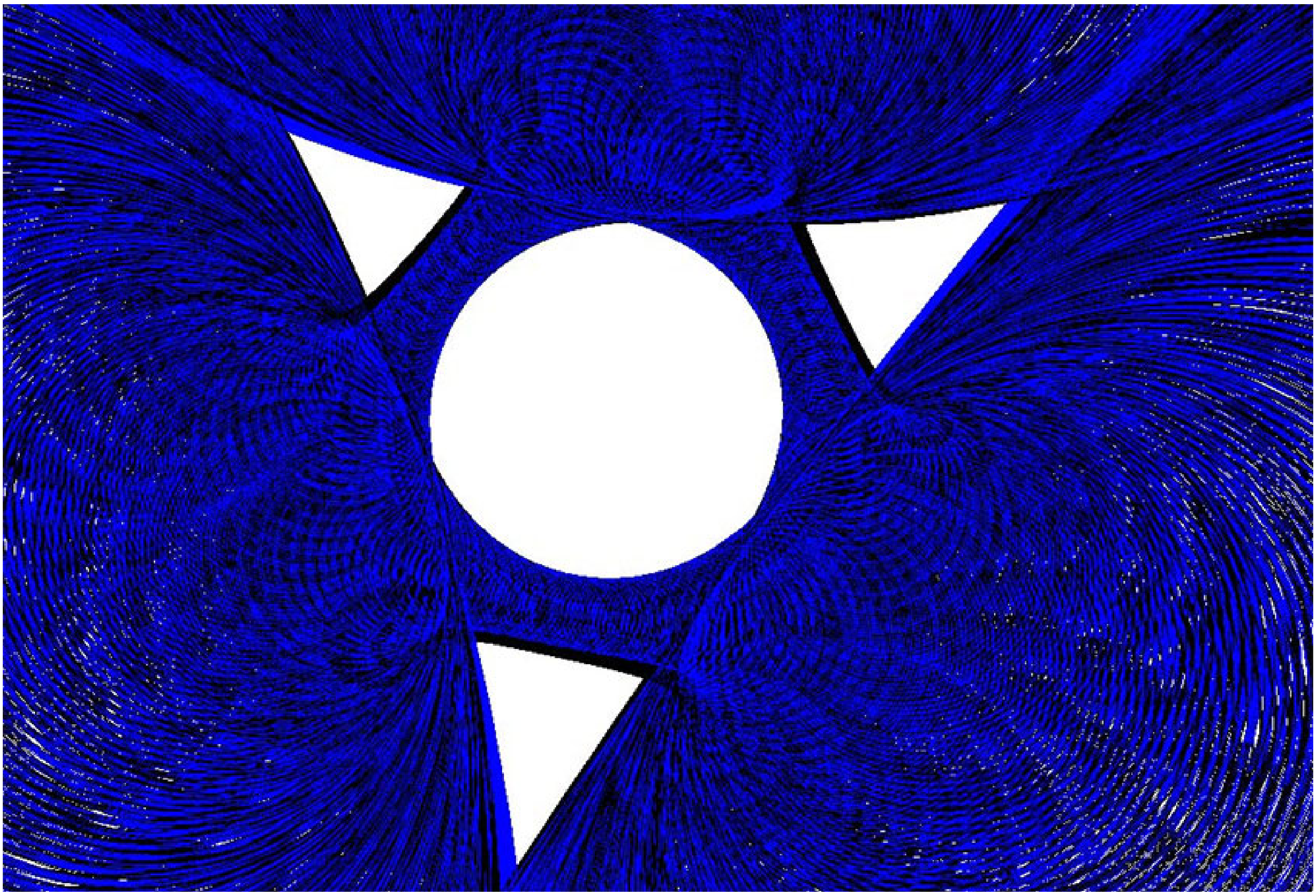


РИС. 14. ТРАНСФОРМАЦИЯ ТРОЙСТВЕННОГО УЗЛА

Послесловие

Траектории движения видео-арта очень интересны с чисто математической точки зрения. Преобразования с неподвижным двигателем, состоящим из *двух* окружностей (это преобразование мы назвали атомарным) классифицируют на гиперболические, эллиптические и параболические, что соответствует трём возможностям расположения окружностей двигателя: они не имеют общих точек, они пересекаются, они касаются, что изложено, например, в [1]. В общем случае любой неподвижный двигатель сведётся к преобразованию, называемому локсодромическим, и траектории движения точек описываются с помощью экспоненты на комплексной плоскости. Но неподвижный двигатель – это только начало видео-арта, в общем случае мы вторгаемся в ещё неизученную математическим анализом область, связанную с теорией динамических конформных систем. Описанные построения легко переносятся на многомерное пространство, для этого вместо инверсий относительно окружностей следует рассматривать инверсии относительно сфер. Свойства получающихся траекторий в трёхмерном случае ещё интересней: если в плоском случае мы можем получить самопересекающиеся замкнутые кривые, *напоминающие* узлы, то в трёхмерном случае мы получаем *настоящие узлы, и крайне интересно знать, как топологические свойства узлов определяются устройством двигателя*. Математически также очень интересно наглядно демонстрировать различные алгебраические формулы и понятия, например: «коммутатор» с помощью соответственно подобранных формул движения, при этом также получаются красивые и топологически содержательные образы.

Но ещё интересней, что *кривые видео-арта выходят за пределы чистой математики*. Как мы показали, они хорошо моделируют движение небесных тел, имеют связи с художественными элементами барокко и соответствуют нашему восприятию красоты. Поэтому мы и говорим об эстетической геометрии, а не только о геометрии окружности.

Также удивительно, что составив двигатель и изучая его действие, мы часто получаем на экране *зооморфные или даже антропоморфные объекты,* хотя не ставили и не могли поставить перед собой такой цели, потому что зависимость изображения от определяющих его формул не содержит никакой известной нам связи с биологией. Но, тем не менее, мы уверены – связь существует, что подтверждается многочисленным образами. Было бы крайне интересно систематическое применение рассмотренных алгоритмов видео-арта для *моделирования биологических объектов и художественной анимации*.

Главным же и самым неожиданным мы считаем тот факт, что симметрия относительно окружности и её композиция оказываются законом художественной гармонии и на её основе создаётся среда, каждое действие в которой также гармонично.

Золотое сечение вводит численную меру для гармоничного соотношения длин, следующий совместный шаг геометрии и эстетики был сделан при создании теории перспективы и, позднее, проективной геометрии, затем фрактальная геометрия дала яркие примеры союза эстетики и математики. Рассмотренные нами алгоритмы, мы уверены, также создают новые возможности как для искусства, так и для научных исследований, в том числе междисциплинарных.

Мы уверены, что исследователи в этой области получат много удовольствия и узнают много нового.

Литература:

1. *Коксетер Г.С.М.* Введение в геометрию. – Москва, Наука, 1966. – 648 с.
2. *Пименов Р.Р.* Эстетическая геометрия или теория симметрий. – СПб: Школьная лига, 2014. – 288 с., с лазерным диском.
3. *Пименов Р.Р.* Эстетика, симметрия и геометрия окружности // Страна Знаний. – 2019. – №8.

Ссылки

1. Видео-арт эстетической геометрии, программа «Додека: медитация» для андроида (https://play.google.com/store/apps/details?id=com.pierbezuhoff.dodeca).
2. В работе использованы публикации инстаграмма (https://www.instagram.com/tritons_life/) и
3. сайт-учебник по эстетической геометрии (http://bogemnyipeterburg.net/revolt/matem /pict/index.html).
4. Развлекательный канал ютуба «Револьт Пименов и его дрессированные тритоны»

(https://www.youtube.com/channel/UCqgKaipRaWcK2xEYIYKlQjA), использующий видео-арт эстетической геометрии.

Револьт Пименов, учитель Лицея ФТШ им. Ж.И. Алферова при Санкт-Петербургском национальном исследовательском академическом университете, член Математического Общества СПб.
Научная деятельность: геометрия, междисциплинарное образование, геометрический видео-арт

По теме:

Эстетика, симметрия и геометрия окружности (/2019-08/546-geometry)

№6, 2020 (/2020-06)

Математика (/component/tags/tag/mathematics)

‹ Назад (/2020-06/660-people-and-wind)

Вперед › (/2020-06/658-thermodynamics)

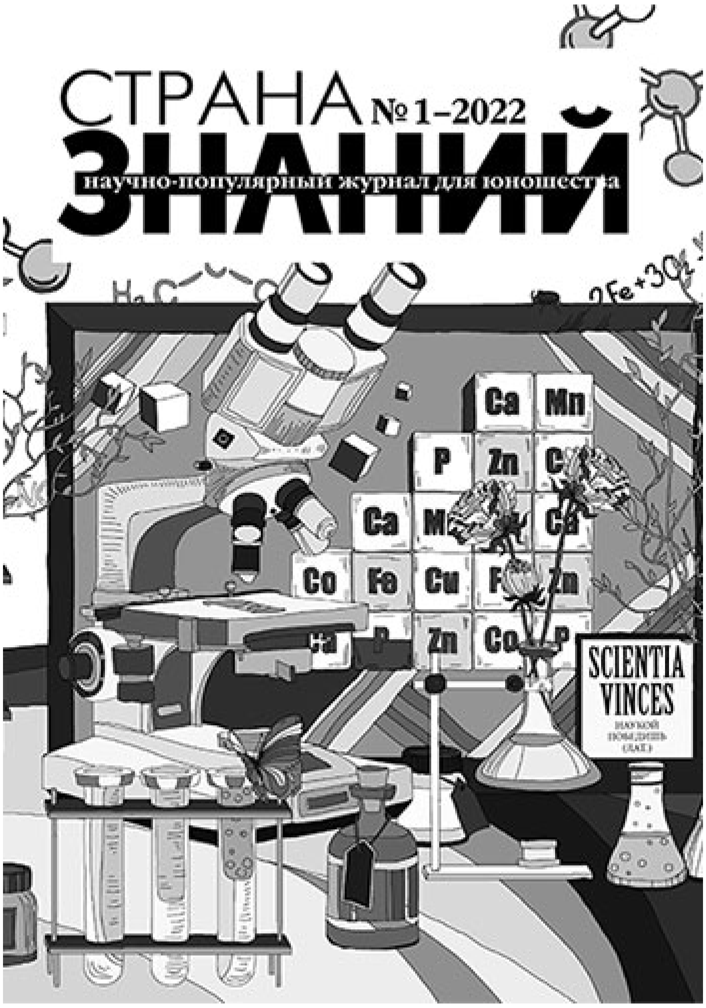
ИНФОРМАЦИЯ К РАЗМЫШЛЕНИЮ

Время работает на того, кто работает

САМОЕ ЧИТАЕМОЕ

- Герберт Аврилакский, подлинная история (/2021-09/786-aureliacus)
- Математические достижения эпохи Возрождения – Никколо Тарталья (/2021-08/782-tartaglia)
- Весы… и парадокс Роберваля (/2021-10/799-weighing)
- Комета Галлея (/2022-01/808-galleys-comet)
- Числа и вычисления [1] (/2021-08/781-calculations)
- Твои озёра, Киев (/2022-01/806-kyiv-lakes)
- Как помочь ученикам выбрать профессию (/2021-09/793-choice-of-profession)
- Это наша соотечественница! (/2022-01/809-bashkirtseva)
- Воспоминания об академике Глушкове и о первых годах работы Института кибернетики (/2022-01/810-glushkov)
- Харьков: «УРАГАН-3» – крупнейшая в мире термоядерная установка (/2021-10/801-uragan)

НОВЫЙ НОМЕР



(/2022-01)

НОВЫЕ СТАТЬИ

- Воспоминания об академике Глушкове и о первых годах работы Института кибернетики (/2022-01/810-glushkov)
- Это наша соотечественница! (/2022-01/809-bashkirtseva)
- Комета Галлея (/2022-01/808-galleys-comet)
- Красавцы и красавицы Флоры (/2022-01/807-beauty-flora)
- Твои озёра, Киев (/2022-01/806-kyiv-lakes)

ПОДШИВКА ЖУРНАЛА

ОБРАТИТЬ ВНИМАНИЕ (/THEME/MATHEMATICS)

> *Математика выступает посредником между мыслью и материей* (/theme/mathematics)
>
> — **Гуго Штейнгаус**

Основатель и издатель
– общественная организация